Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 2000.

Considera la función f: R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Calcula los límites laterales de f en x = 0. ¿Es continua f en x=0?
(b) [1 punto] Calcula el valor de la derivada fe f en x = 1.

Solución

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y por tanto f(x) no es continua en x = 0.

(b)

Si x$\neq$0, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ luego $f'(x) = \dfrac{0-1\left(0+e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.

Por tanto $f'(1) = \dfrac{e^{\frac{1}{1}}}{1^2\left(1+e^{\frac{1}{1}}\right)^2} = \dfrac{e}{(1+e)^2}$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 2000.

Considera la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = (1+x)e^x$.

(a) [1'5 puntos] Calcula $\int f(x)dx$.

(b) [1 punto] Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (0,3).

Solución

(a) $I(x) = \int (1+x)e^x\,dx$ Aplicamos la fórmula de la integral por partes $\int udv = uv - \int vdu$

con U = 1+x; du = dx

$dv = e^x dx$; $v = \int e^x dx = e^x$

$I(x) = (1+x)e^x - \int e^x dx = (1+x)e^x - e^x + K$.

(b) $I(x) = (1+x)e^x - e^x + K$,. Como pasa por (0,3) tenemos
$3 = (1+0)e^0 - e^0 + K$; de donde 3 = 1 – 1 + K, y K = 3
Luego la función es $I(x) = (1+x)e^x - e^x + 3$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 2000.

[2'5 puntos] Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por x-1 = y-2 =(x-1)/(-2) ; (x-4)/(-1) = (y+1)/3 = z/2

Solución

r: x-1 = y-2 =(x-1)/(-2) . Un punto es A(1,2,1) y un vector director **v**=(1,1,-2)
s: (x-4)/(-1) = (y+1)/3 = z/2. Un punto es B(4,-1,0) y un vector director **w**=(-1,3,2)
La recta que se apoya perpendicularmente en r y s se da como intersección de dos planos π_1 y π_2. Siendo π_1 ={A, **v, v x w**} y π_2 ={B, w**, v x w**}.

$$\mathbf{v \times w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2+6) - \mathbf{j}(2-2) + \mathbf{k}(3+1) = (8,0,4)$$

$$\pi_1 \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (x-1)(4) - (y-2)(4+16) + (z-1)(-8) = 4x - 20y - 8z + 44 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (x-4)(12) - (y+12)(-4-16) + (z)(-24) = 12x + 20y - 24z - 28 = 0$$

La recta que se apoya perpendicularmente en r y s es $\begin{cases} 4x - 20y - 8z + 44 = 0 \\ 12x + 20y - 24z - 28 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 2000.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Halla los valores de x e y tales que AX = U.
(b) [0'75 puntos] Halla la matriz A^{-1} y calcula $A^{-1}U$.
(c) [1 punto] Encuentra los posibles valores de m para que los vectores $A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

Solución

(a)
AX = U

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$, existe A^{-1} luego $X = A^{-1}\cdot U$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$X = A^{-1}\cdot U = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-18 \\ -28+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, es decir x = 3 e y = -1

(b)

$A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, para que sean dependientes es decir

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, operando $\begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, luego los elementos han de ser proporcionales

$\dfrac{3+2m}{1} = \dfrac{4+3m}{m}$. Multiplicando en cruz y pasándolo todo a un miembro tenemos $m^2 = 2$ de donde $m = \pm\sqrt{2}$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 2000.

[2'5 puntos] Determina una función polinómica de grado 3 sabiendo que verifica que alcanza un máximo en x = 1, que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que la recta de ecuación y = x es tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 0.

Solución

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$
Como x = 1 es máximo, tenemos f ' (1) = 0
Como pasa por (1,1) , tenemos f(1) = 1
Como y = x es tangente en x = 0, la pendiente en 0 es 1, es decir f ' (0) = 1
Como y = x es tangente en x = 0, el punto (0,0) es de la función luego f(0) = 0
$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

De f ‘ (0) = 1, tenemos 1 = c
De f ‘ (1) = 0, tenemos 0 = 3a + 2b +1
De f(0) = 0, tenemos 0 = d
De f(1) = 1, tenemos 1 = a+b+1
Resolviendo el sistema
0 = 3a+2b+1
0 = a+b. Obtenemos a = -1 y b = 1 luego la función pedida es:
$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d = -x^3+x^2+x$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 2000.

[2'5 puntos] Calcula la siguiente integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$ ¿Qué representa geométricamente?

Solución

$I(x) = \int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Resolvemos $x^2+4x+3 = 0$ y obtenemos x = - 1 y x = - 3, luego $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Descomponemos

$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$, de donde

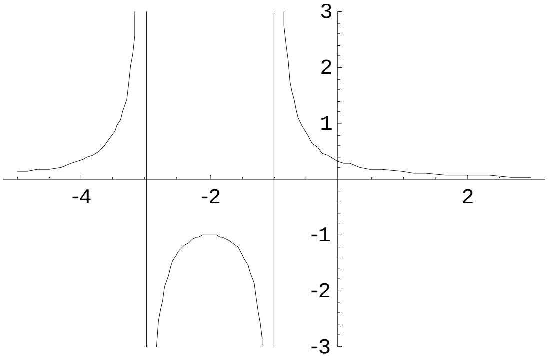
1 = A(x+3)+B(x+1)
De x = -1, obtenemos 1 = 2A con lo cual A = ½
De x = -3, obtenemos 1 = -2B con lo cual B = - ½

Luego $I(x) = \int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{1/2}{x+1}dx + \int \frac{-1/2}{x+3}dx$ = 1/2ln|x+1| - 1/2ln|x+3| = $1/2\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$.

$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_0^2$ = [1/2ln(3/5) - 1/2ln(1/3)] = 1/2ln(9/5)

Y $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$ representa el área encerrada por la función $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$, el eje de abcisas y las abcisas x = 0 y x = 2

La gráfica (no la piden) de $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$, es:

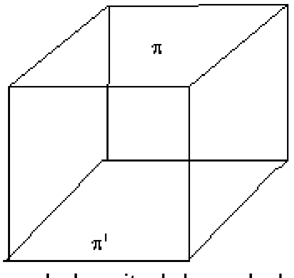


Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 2000.

[2'5 puntos] Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos 2x-2y+z-1=0 y 2x-2y+z-5=0.

Solución

Si los planos π y π ‘ son paralelos el cubo que determinan es



con lo cual la distancia de un plano al otro es la longitud de un lado, y al cubo es el volumen pedido.
d(π, π ‘) = d (punto A de π a π ‘)

Un punto A de π , es tomando x= 0, y = 0 obtengo z = 1 luego el punto es A(0,0,1)

d(π, π ') = d (punto A de π a π ') = d(A, π ') = $\dfrac{|0-0+1-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{9}}$ = 4/3

Volumen = $(4/3)^3$ = 64/27 unidades de volumen.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 2000.

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\lambda y+(\lambda-1)z & = & 1 \\ y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & -3 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.

(c) [0'5 puntos] Discute el sistema para los restantes valores de λ.

Solución

(a)

Sean A y A* la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Si |A| ≠ 0, el sistema tiene solución única

Si |A| = 0, el sistema no tiene solución única, y tendremos que verlo caso a caso según los valores de λ, y estudiar si los rangos de A y de A^* coinciden o no. Como me piden que tenga al menos dos soluciones distintas tiene infinitas soluciones, por tanto tiene que ser rango(A) = rango(A^*) = 2

Empezamos

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 1(- 2) + 2 = 0, sea cual sea λ por tanto rango (A) no es 3. Al ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que rango (A) = 2

En A*, para que rango(A^*) = 2 tiene que ser $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = - 4 – 2(1 - λ) = 2λ - 6 = 0, de donde λ = 3.

Tomando λ = 3, por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A) = rango(A*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado y tiene al menos dos soluciones (por tanto tiene infinitas)

(b)

Tomando λ = 3, por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A) = rango(A*) = 2 tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomo las ecuaciones 2ª y 3ª

$\begin{cases} y+z=1 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$. Haciendo z = μ, nos resulta y = 1 - μ y entrando en la otra ecuación obtenemos x = - 2 + μ. Es decir las soluciones del sistema en este caso son (x,y,z) = (- 2 + μ., 1 - μ., μ.) con $\mu \in \Re$.

(c)

Si $\lambda \neq 3$, tenemos rango (A) = 2 ≠ rango (A^*) y el sistema es incompatible por el teorema de Rouche.